

**ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Δημήτριος Ντρίζος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 με έδρα τα Τρίκαλα
Αθανάσιος Καραντάνας, Μαθηματικός του 4ου ΓΕ.Λ Καρδίτσας
Σεραφείμ Σαμορέλης, Μαθηματικός του 8ου ΓΕ.Λ Τρικάλων
Κωνσταντίνος Σερίφης, Μαθηματικός του ΓΕ.Λ Μουζακίου
Σωτήριος Σκοτίδας, Μαθηματικός του 2ου ΓΕ.Λ Καρδίτσας

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 ΜΑΪΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $1 - 1$ είναι και γνησίως μονότονη».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία x του Δ για τα οποία ισχύει $f''(x) \neq 0$ δεν είναι θέσεις σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0 .

- γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta)$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta)$ μια ελάχιστη τιμή.
- δ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- ε) Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο α και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε υποχρεωτικά είναι $f'(\alpha) = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(f \circ g)(x) = -x^2 + 6x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου g συνάρτηση με $g(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x}, x \in (0, +\infty),$$

η γραφική παράσταση της οποίας έχει ως ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία

$$(\varepsilon): y = 4x - 1$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^2 + 4x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

- B2.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

Μονάδες 6

- B3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 7

- B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{f^2(x)}{g(x)} = 2018$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x \in [1, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της με τετμημένη x_0 , $x_0 \in (1, +\infty)$, η οποία διέρχεται από την αρχή αξόνων.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f^2(x) \leq f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$, να αποδείξετε ότι

$$1 < E < \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{2e}}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα, και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu(f(x)) \cdot \ln \frac{1}{f(x)} \right)$

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\alpha + 1, f(\alpha + 1))$, όπου

$$\alpha > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά. (μονάδες 4)

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha + 1)$ τέτοιο, ώστε $(OAB) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \cdot g'(\xi)$,

όπου (OAB) είναι το εμβαδόν του τριγώνου OAB . (μονάδες 3)

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την απόχωρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ